



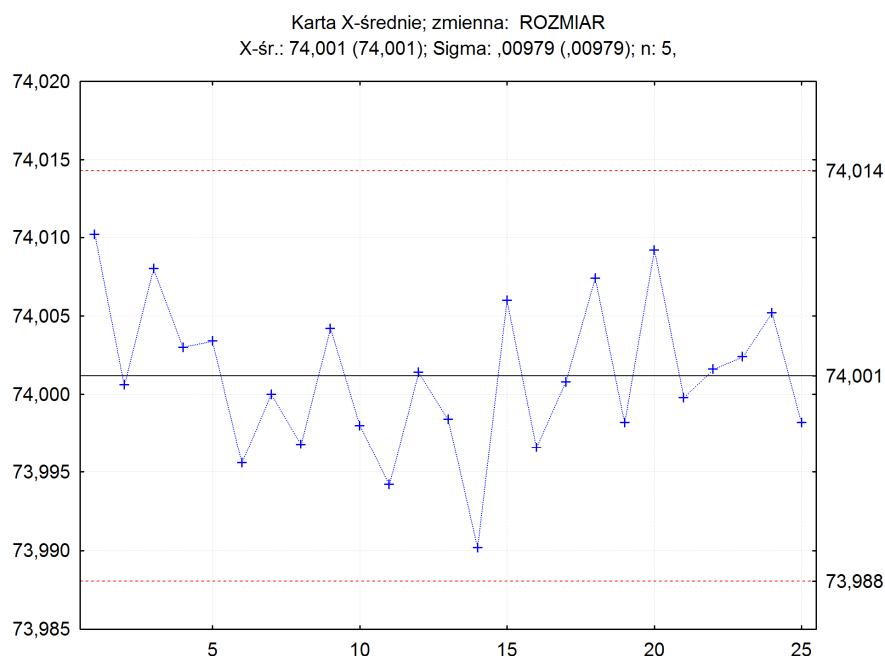
## STEROWANIE JAKOŚCIĄ PROCESU O WIELU WŁAŚCIWOŚCIACH: WIELOWYMIAROWE KARTY KONTROLNE I INNE NARZĘDZIA

*Tomasz Demski, StatSoft Polska Sp. z o.o.*

Statystyczne sterowanie jakością procesów (SPC) udowodniło swoją skuteczność w wielu dziedzinach. Jednak oryginalnie zostało opracowane dla procesów, w których ważna jest tylko jedna właściwość. W rzeczywistości często mamy do czynienia z procesami charakteryzowanymi przez wiele powiązanych ze sobą cech. Zajmiemy się narzędziami służącymi do sterowania jakością takich właśnie procesów.

### Krótko o kartach kontrolnych Shewharta

Karty kontrolne Shewharta zostały zaproponowane w 1924 roku przez W. A. Shewharta. Okazały się one niezwykle użyteczne w wielu dziedzinach, zarówno w produkcji, jak i usługach. Podstawowe zastosowanie kart kontrolnych to wykrywanie nielosowych zmian w przebiegu procesu. Poniżej widzimy przykładową kartę kontrolną.





Pokazuje ona, jak zmieniała się wartość ważnej z punktu widzenia jakości produktu cechy; w naszym przypadku jest to średnica pierścienia tłokowego.

Wielką zaletą karty kontrolnej jest łatwość jej interpretacji. Jeśli wyniki pomiarów dla próbki wykrócą poza granice kontrolne (przerwane linie na wykresie powyżej), to mamy sygnał o rozregulowaniu, sugerujący, że wystąpiło zdarzenie, któremu można przypisać nielosową przyczynę. Po znalezieniu przyczyn zmian możemy je wyeliminować (lub zmniejszyć częstość ich występowania), a co za tym idzie, uzyskać proces o mniejszej zmienności, bardziej stabilny oraz przewidywalny – krótko mówiąc – lepszy.

Ponadto karty kontrolne w naturalny sposób pokazują przebieg zmian cech procesu, co ułatwia wykrycie wzorców, trendów i tendencji. Dokładny opis kart kontrolnych znajduje się w podręcznikach: [1], [2] i [3].

## Wiele właściwości

Karty kontrolne Shewharta świetnie nadają się do monitorowania pojedynczych właściwości. Co jednak mamy zrobić, gdy proces charakteryzowany jest wieloma właściwościami?

Najprostsze rozwiązanie to po prostu zastosowanie wielu kart kontrolnych. Dla każdej właściwości tworzymy osobną kartę kontrolną i badamy je niezależnie od siebie. Podejście takie ma kilka wad.

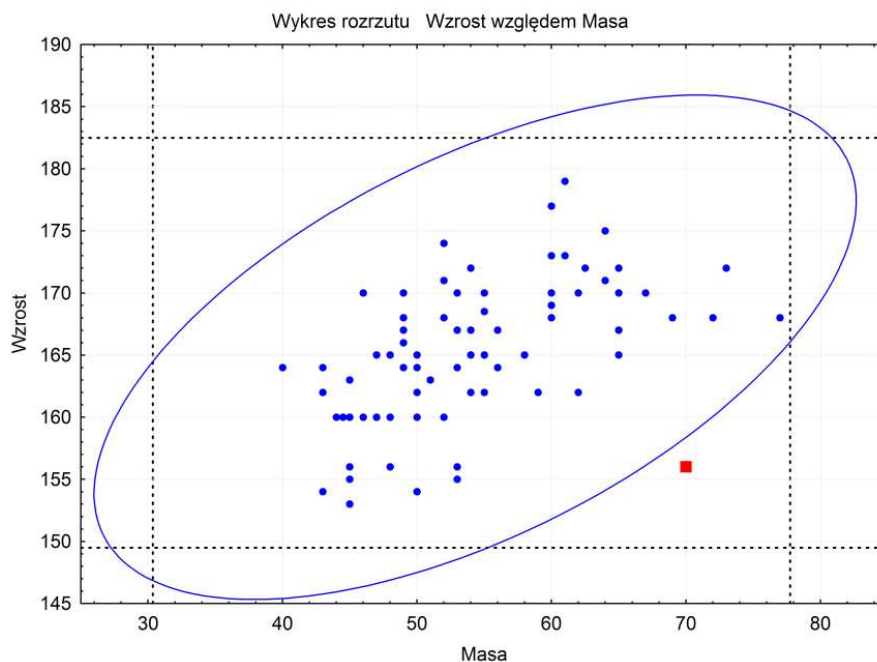
Pierwsza z nich pojawia się, gdy mamy bardzo dużo właściwości. Przeglądanie nawet kilku kart kontrolnych może być kłopotliwe, a co dopiero kiedy ich będzie kilkadziesiąt lub kilkaset?

Drugi problem wiąże się ryzykiem fałszywych sygnałów o rozregulowaniu. W przypadku pojedynczej karty kontrolnej możemy je łatwo określić – zazwyczaj kartę tworzymy tak, aby prawdopodobieństwo fałszywego alarmu wynosiło 0,0027. Jeśli jednak mamy karty dla wielu właściwości, to ryzyko fałszywego sygnału rośnie. Dodatkowo, gdy właściwości są ze sobą powiązane, to ryzyko to jest trudne lub nawet niemożliwe do oszacowania. Oznacza to, że może nam bardzo wzrosnąć liczba fałszywych sygnałów o rozregulowaniu.

Jednak największą wadą zespołu pojedynczych kart kontrolnych jest pomijanie związków między zmiennymi. Zilustrujemy to prostym przykładem. Załóżmy, że badamy wzrost i masę ciała dzieci w wieku 12-13 lat. W badanej przez nas zbiorowości średnia masa ciała wynosi 54,05 przy odchyleniu standardowym 7,9. Z kolei średni wzrost wynosi 166 cm z odchyleniem standardowym 5,5. Na kartach kontrolnych przyjmuje się, że typowe wartości leżą w przedziale średnia  $\pm$  3 odchylenia standardowe. W naszym przykładzie przedziały typowych wartości wyniosą: [149,5; 182,5] dla wzrostu i [30,35; 77,75] dla wagi. Ale przecież waga i wzrost są ze sobą powiązane! Ktoś, kto ma wzrost poniżej średniej, raczej nie powinien mieć masy ciała wyraźnie przekraczającej średnią.

Poniżej widzimy dwuwymiarowy rozkład masy ciała i wzrostu w badanej zbiorowości. Przerwaną linią naniesiono na nim przedziały typowych wartości wyznaczone niezależnie

dla obu badanych zmiennych. Ponadto na wykresie znajduje się elipsa, w której mieści się 99,73% dopasowanego do danych dwuwymiarowego rozkładu normalnego. Właśnie ona stanowi poprawne kryterium „typowości” danej obserwacji.



Na wykresie nanieśliśmy punkty (kwadrat) odpowiadający nietypowej obserwacji: reprezentuje on osobę o masie ciała 70 kg i wzroście 156 cm. Obie te cechy jak najbardziej mieszczą się w zakresie typowych wartości, gdy na nie patrzymy oddzielnie. Jednak jak widać na wykresie, osoby o wzroście ok. 155 cm miały masę ciała mniejszą niż 55 kg: raczej nie ulega wątpliwości, że osoba reprezentowana przez kwadrat jest nietypowa.

Wykres dwuwymiarowy z naniesioną elipsą rozkładu normalnego moglibyśmy stosować do sterowania jakością, jednak ma on zastosowanie tylko dla dwóch właściwości i nie pokazuje kolejności pomiarów, a co za tym idzie, nie nadaje się do wykrywania trendów, wzorców i tendencji. Innymi słowy, nie pokazuje zmienności procesu w czasie.

Odpowiednim narzędziem do monitorowania procesów o wielu powiązanych ze sobą właściwościami jest karta  $T^2$  Hotellinga i towarzysząca jej karta uogólnionej wariancji (ang. *generalized variance*, GV), którymi zajmiemy się w dalszej części artykułu.

## Karty $T^2$ Hotellinga i uogólnionej wariancji

Na karcie  $T^2$  Hotellinga zamiast wartości oryginalnych pomiarów wykreślamy pewną przekształconą wartość. Można ją rozumieć jako miarę odległości danej próbki od środka wielowymiarowego rozkładu normalnego. Miara ta uwzględnia korelacje liniowe badanych zmiennych. Karta  $T^2$  jest wielowymiarowym odpowiednikiem karty  $\bar{X}$ -średnie. Szczegóły obliczeniowe i interpretację można znaleźć w *Dodatku* na str. 52.



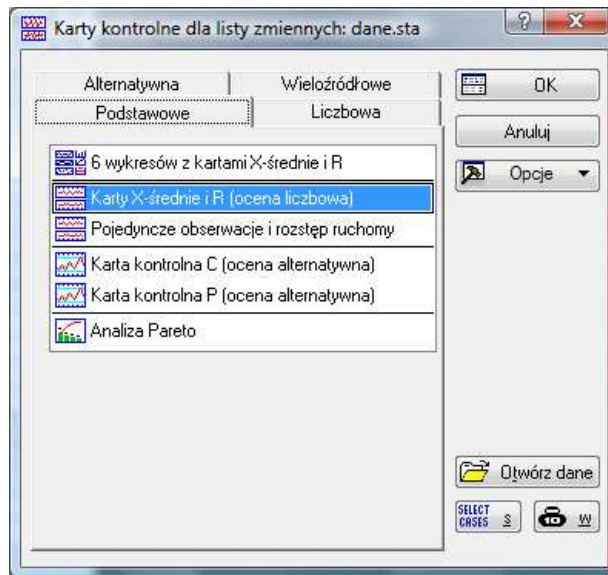
Zwykle w przypadku jednej właściwości tworzymy nie tylko kartę  $\bar{X}$ -średnie, ale również kartę zmienności (np. R), pokazującą, jaka jest zmienność w obrębie próbki. Wielowymiarowym odpowiednikiem karty R jest karta uogólnionej wariancji. Na karcie tej wykreślany jest wyznacznik macierzy kowariancji zmiennych w próbce (więcej szczegółów znajduje się w *Dodatku* na str. 52).

Zobaczymy działanie kart wielowymiarowych w praktyce. Nasze dane dotyczą wytwarzania włókien. Badanymi właściwościami są: średnica włókna i jego wytrzymałość. Zebraliśmy 21 próbek po 5 jednostek każda<sup>1</sup>.

Zacznijmy od utworzenia kart jednowymiarowych. W tym celu na karcie *Data Mining* wstążki naciskamy przycisk *Optymalizacja* i z menu wybieramy *Karty kontrolne – Karty kontrolne dla listy zmiennych*.

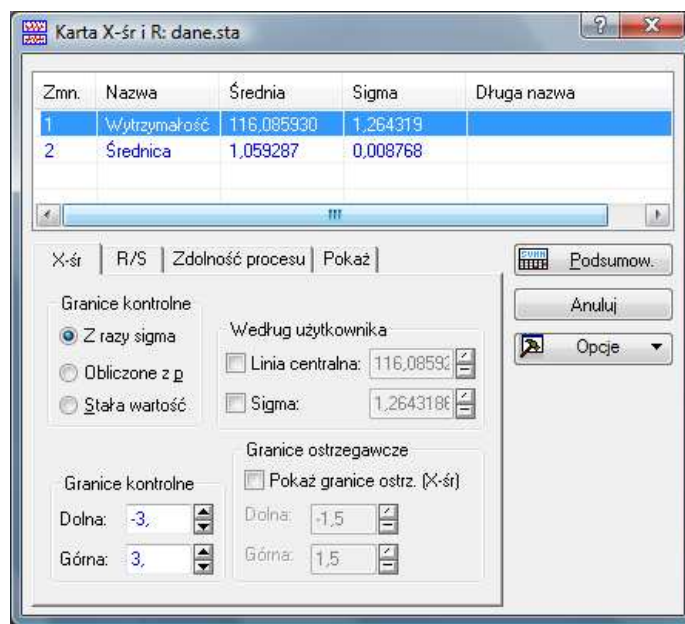


Na ekranie pojawi się okno wyboru rodzaju karty. Wskazujemy najpopularniejszą kartę  $\bar{X}$ -średnie i R po czym klikamy *OK*.



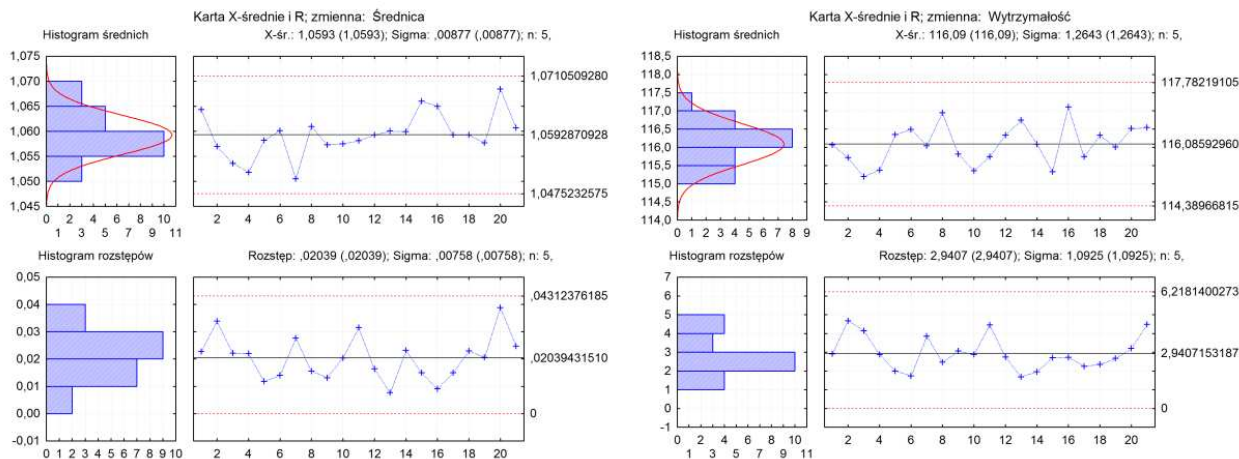
W kolejnym oknie wybieramy zmienne do analizy: *Wytrzymałość* i *Średnica*. Po kliknięciu *OK* w oknie *Karta X-śr i R* określamy parametry karty.

<sup>1</sup> Przykład został opracowany na podstawie przykładu 8-1 z podręcznika [1], ale wykorzystujemy inne dane.

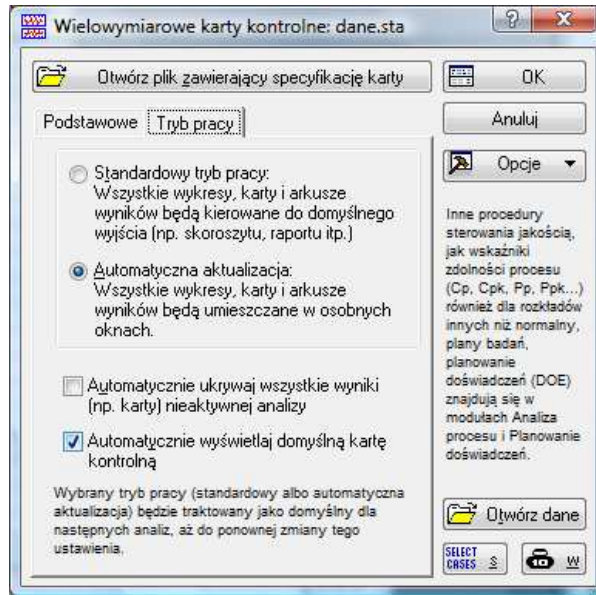


W naszym przypadku odpowiednie będą ustawienia domyślne, takie jak na rysunku powyżej. Karty zostaną wyświetlone po kliknięciu przycisku *Podsumowanie*.

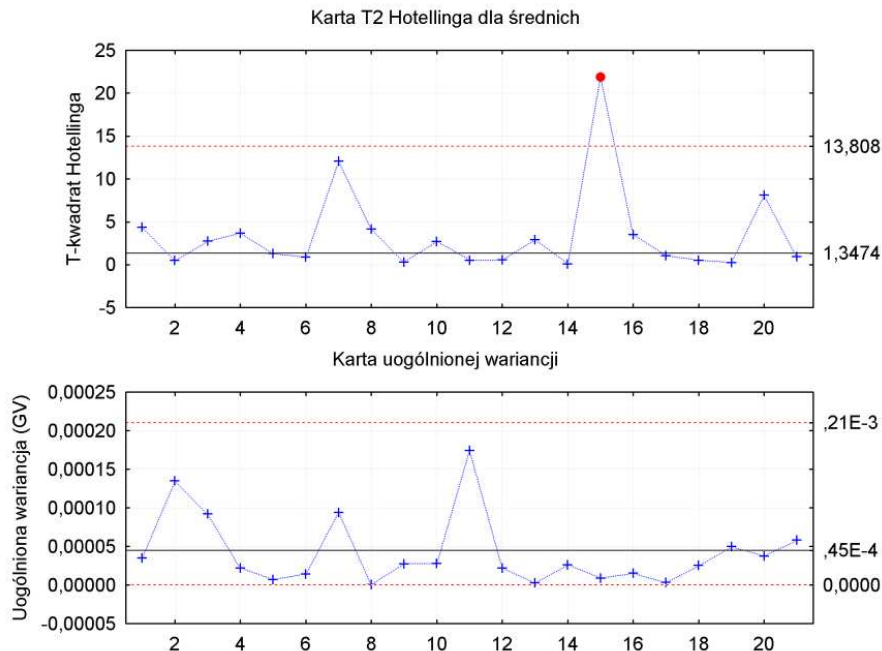
Poniżej widzimy karty kontrolne dla obu zmiennych. Jak widać, nie ma żadnej próbki poza granicami kontrolnymi. Możemy jednak spodziewać się, iż między wytrzymałością a średnicą będzie występował pewien związek, dlatego sprawdzimy też karty wielowymiarowe.



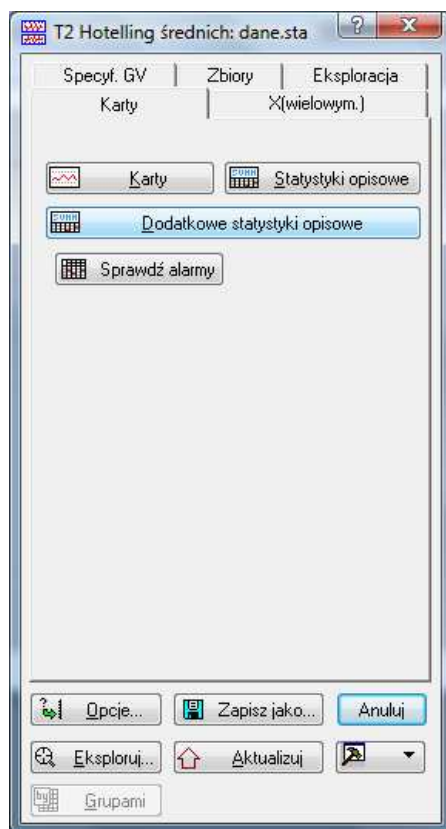
Na karcie *Statystyka* w grupie *Statystyki przemysłowe* naciskamy przycisk *Wielowymiarowe*, aby przywołać panel początkowy modułu *Wielowymiarowe karty kontrolne*. Ponieważ mamy dane o próbkach, a nie pojedyncze pomiary, wybieramy polecenie *Karta T2 Hotellinga dla średnich*. Badanie kart ułatwia włączenie automatycznej aktualizacji karty: w tym celu przechodzimy na kartę *Tryb pracy* panelu początkowego i zaznaczamy pozycję *Automatyczna aktualizacja*. Potwierdzamy ustawienia poprzez naciśnięcie *OK*.



Na ekranie pojawi się okno *Zmienne dla karty T2* służące do określania ustawień dla naszej analizy. Klikamy przycisk *Zmienne* i jako zmienne do analizy wybieramy *Wytrzymałość* i *Średnica*. Akceptujemy inne domyślne ustawienia i klikamy *OK*. Program utworzy karty kontrolne  $T^2$  i uogólnionej wariancji. Jak widać, tym razem mamy wyraźne przekroczenie górnej granicy kontrolnej na karcie  $T^2$  dla próbki nr 15. Zauważmy, że karta rozstępu nie wykazuje żadnych rozregulowań.



Wykryliśmy rozregulowanie i co dalej? W odróżnieniu od zwykłych kart Shewharta nie mamy prostej interpretacji sygnału o rozregulowaniu. Aby dowiedzieć się, co go spowodowało, możemy m.in. przejrzeć karty jednowymiarowe. W naszym przypadku jest to łatwe, bo mamy tylko dwie właściwości.

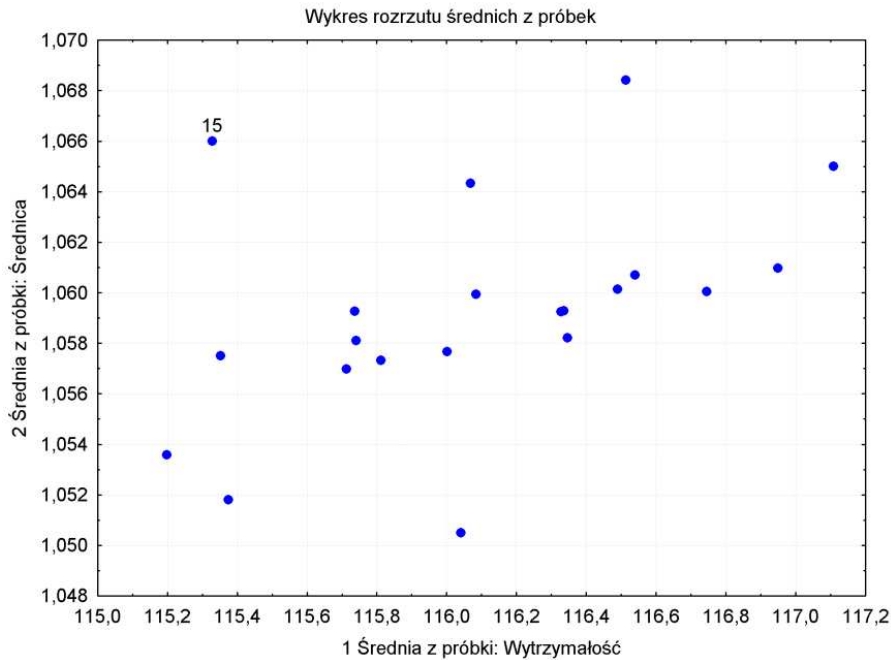


Patrząc na utworzone wcześniej karty jednowymiarowe zauważymy, że próbka 15 ma jedną z największych średnic włókna, przy jednej z mniejszych wytrzymałości. Bliższe badanie przeprowadzimy, korzystając z zestawienia tworzonego przyciskiem *Dodatkowe statystyki opisowe* na zakładce *Karty* okna wyboru wyników. Po utworzeniu arkusza oznaczamy go jako źródło danych do analizy. W tym celu na karcie *Dane* wstążki w grupie *Tryb* zaznaczamy pole *Wejście*.

Na początek zobaczymy, jak wyglądają średnie obu właściwości w próbkach. W tym celu na karcie *Wykresy* wstążki klikamy przycisk *Rozrzutu*. Na ekranie pojawi się okno określania wykresu, w którym jako zmienne do analizy wskazujemy *1 Średnia z próbki* oraz *2 Średnia z próbki*.

Poniżej widzimy wykres rozrzutu dla średnich z próbek. Potwierdza on nasze wcześniejsze wnioski odnośnie przyczyny wystąpienia alarmu. Próbka nr 15 ma wyraźnie mniejszą średnią wytrzymałość niż inne próbki o podobnej średniej średnicy włókna.

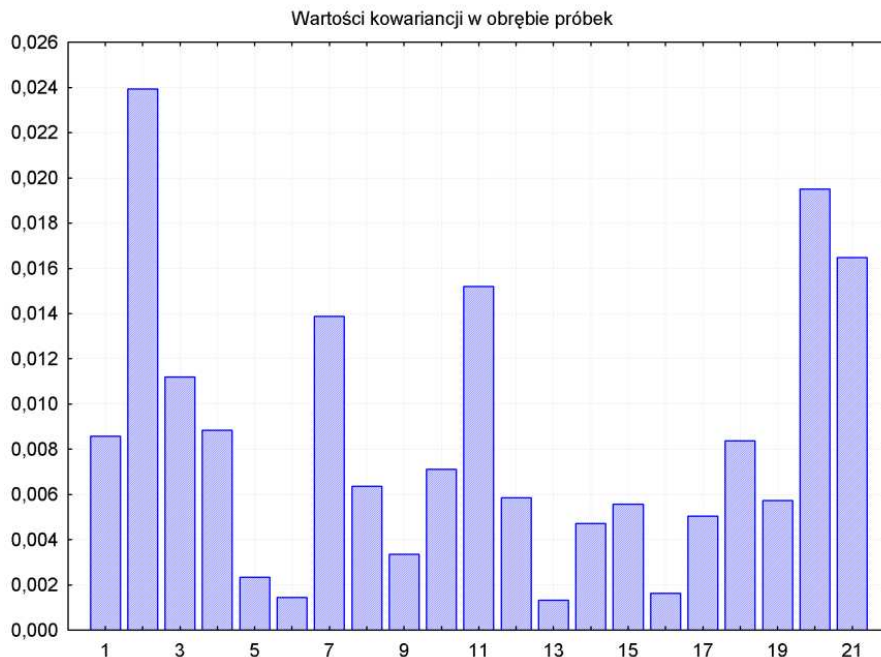
W arkuszu z dodatkowymi statystykami warto spojrzeć również na wartości kowariancji w obrębie próbek. Dla próbki 15 mamy typową wartość kowariancji, podobną jak dla innych próbek.



Wygląda na to, że dla próbki 15 pojawiło się przesunięcie w zależności. Mówiąc dokładniej, jeśli wytrzymałość jest zależna liniowo od średnicy:

$$\text{Wytrzymałość} = a + b \cdot \text{średnica},$$

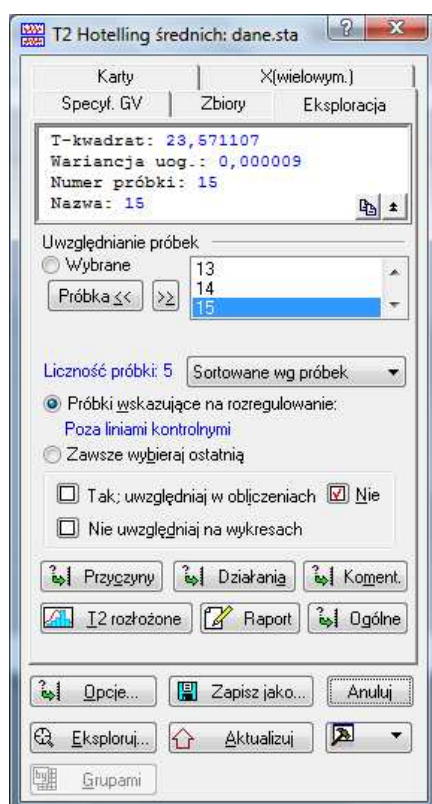
to dla próbki nr 15 zmienił się parametr  $a$ . Przyczyną tego typu zachowania mogłoby być np. złe skalibrowanie jednego z urządzeń pomiarowych, powodujące wystąpienie błędu systematycznego. Inna możliwa przyczyna, to zmiana charakterystyki surowca. Aby określić przyczynę, musimy zbadać, co działo się na linii produkcyjnej; statystyka może nam tylko wskazać kierunki poszukiwań.





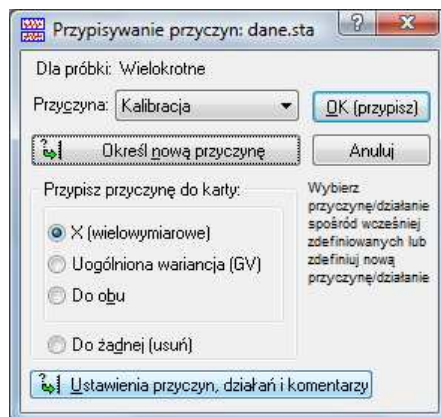
Podręcznik [1] zaleca usuwanie próbek wskazujących na rozregulowanie z obliczania statystyk, wykorzystywanych później do monitorowania procesu. Gdy dowiemy się, co spowodowało rozregulowanie, możemy próbkę nr 15 opisać i pominąć w dalszych obliczeniach.

Aby wyłączyć próbkę wskazującą na rozregulowanie, przechodzimy na kartę *Eksploracja* okna wyboru wyników. Zaznaczmy *Próbki wskazujące na rozregulowanie* i pole *Nie* obok napisu *uwzględniaj w obliczeniach*.

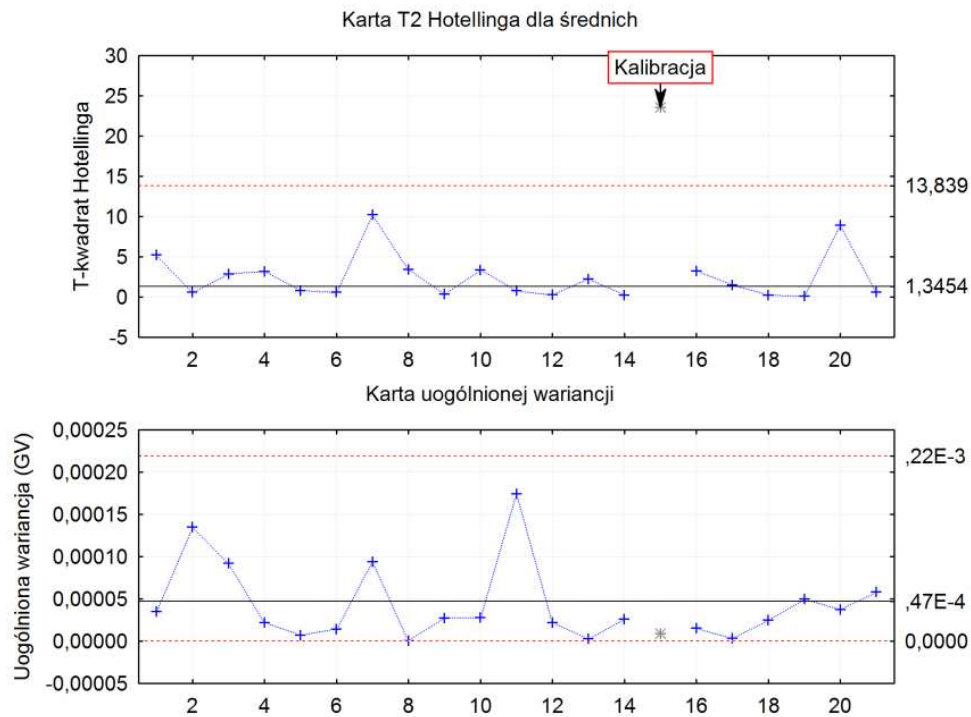


Program zapyta nas o zmienną, w której ma zapisać kody oznaczające pomijanie próbki w obliczeniach. W naszym przypadku wybieramy zmienną *Kody*.

Opiszemy jeszcze tę próbkę przyczyną, niech to będzie np. *Kalibracja*. Po kliknięciu przycisku *Przyczyny* na ekranie pojawi się okno zarządzania przyczynami:



Naciskamy w nim *Określ przyczynę* i podajemy nową przyczynę *Kalibracja*. Karta kontrolna zostanie automatycznie odświeżona; widzimy ją na rysunku poniżej.



## Inne narzędzia monitorowania procesów o wielu właściwościach

Karta  $T^2$  jest najbardziej naturalnym uogólnieniem zwykłych kart kontrolnych dla przypadku wielowymiarowego. Istnieje jednak wiele innych sposobów wykrywania nietypowych przypadków, gdy mamy do czynienia z wieloma powiązаныmi ze sobą właściwościami.

W przypadku wielu ważnych i powiązanych ze sobą właściwości często stosuje się analizę składowych głównych (zob. np. [6]). W wyniku tej analizy ze zbioru zmiennych charakteryzujących proces uzyskujemy zestaw nowych zmiennych, które nazywamy składowymi głównymi. W odróżnieniu od zmiennych wejściowych składowe główne są nieskorelowane. Kluczową ich cechą jest to, że zazwyczaj stosunkowo niewielka liczba składowych głównych przenosi zdecydowaną większość informacji zawartej w dużo większej liczbie zmiennych wejściowych. Dzięki temu np. zamiast monitorować 30 zmiennych wejściowych, możemy badać tylko 3 składowe główne.

Analiza z wykorzystaniem składowych głównych jest trudniejsza niż przy użyciu karty  $T^2$ , jednak umożliwia wykrywanie bardziej złożonych zależności np. występowania niejednorodności procesu, tzn. wielu oddzielonych od siebie skupień w danych. Przykład takiej analizy omówiono w artykule [5].

Jeśli mamy bardzo dużo właściwości procesu (kilkadziesiąt lub kilkaset), to stosowanie karty  $T^2$  staje się coraz trudniejsze. W takim wypadku standardowym podejściem jest



właśnie wykonanie najpierw analizy składowych głównych, a potem tworzenie kart kontrolnych dla najważniejszych składowych. Taki sposób analizy danych wdrożono w pakiecie *STATISTICA MSPC*, a przykład jego zastosowania znajduje się w artykule [4].

Zarówno karta  $T^2$ , jak i metody bazujące na analizie składowych głównych zakładają, że zależności między właściwościami procesu są liniowe. Bardzo często założenie takie jest spełnione, ale co zrobić, gdy nie jest? Otóż możemy wtedy zastosować metody zgłębiania danych (*data mining*), np. sieci neuronowe, do zbudowania modelu opisującego zależności wstępujące w procesie, a potem za pomocą zwykłych kart kontrolnych monitorować rozbieżności między wartościami przewidywanymi przez nasz model a obserwowanymi w rzeczywistości. Jeśli w procesie zajdzie zmiana, to model przestanie dobrze opisywać proces i nastąpi wzrost rozbieżności, a karta nas o tym ostrzeże.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną sprawę. Jeśli naszym zadaniem jest zapewnienie jakości całego procesu, to będziemy musieli monitorować wiele etapów procesu. W różnych miejscach będziemy stosować różne narzędzia: w jednych wystarczą zwykłe karty Shewharta, w innych będziemy potrzebowali wyrafinowanych technik zgłębiania danych. W każdym razie będziemy potrzebowali narzędzia, które umożliwi nam ogarnięcie całości procesu. Właśnie do tego celu zaprojektowano system *STATISTICA MAS*.



W *STATISTICA MAS* monitorujemy jakość procesu za pomocą pulpitów, takich jak przedstawiony na rysunku powyżej. Każdemu etapowi procesu odpowiada w nim ikona, która kolorem informuje nas, czy wszystko jest w porządku.

Co ważne, pulpity oddają hierarchię procesów. Możemy mieć pulpit dla całego procesu, w którym ikony powiadamiają nas o stanie jego poszczególnych etapów. Kliknięcie na taką ikonę otwiera kolejny pulpit, tym razem informujący nas o stanie składników danego etapu. I tak aż do osiągnięcia poziomu pojedynczych pomiarów.



Warto podkreślić, że pulpity MAS wykorzystują nie tylko proste i wielowymiarowe karty kontrolne, ale również techniki wielowymiarowe, takie jak PCA oraz metody zgłębiania danych (*data mining*).

## Dodatek: wzory

Statystykę  $T^2(p)$  dla próbki  $p$  obliczamy z następującego wzoru (zob. [1]):

$$T^2(p) = n[\bar{\mathbf{x}}(p) - \bar{\mathbf{x}}]' \mathbf{S}^{-1} [(\bar{\mathbf{x}}(p) - \bar{\mathbf{x}})] \quad (1)$$

Gdzie:  $n$  to liczba jednostek w próbce,  $\bar{\mathbf{x}}(p)$  to wektor średnich wartości właściwości w próbce,  $\bar{\mathbf{x}}$  to wektor średnich wartości uregulowanego procesu,  $'$  oznacza macierz transponowaną,  $\mathbf{S}^{-1}$  to macierz odwrotna do macierzy kowariancji  $\mathbf{S}$ .

Macierz kowariancji wyznaczamy, uśredniając po wszystkich próbkach macierz kowariancji dla próbki, której elementy wyznaczamy ze wzoru:

$$S_{ij}(p) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [x_{ik}(p) - \bar{x}_i(p)][x_{jk}(p) - \bar{x}_j(p)] \quad (2)$$

Gdzie:  $x_{ik}(p)$  to wartość właściwości numer  $i$  dla  $k$ -tej jednostki w próbce  $p$ ,  $\bar{x}_i(p)$  to średnia wartość właściwości numer  $i$  dla  $k$ -tej jednostki w próbce  $p$ .

Aby zrozumieć znaczenie  $T^2$ , przyjmijmy, że nasz proces ma dwie właściwości, które są od siebie niezależne. W takim wypadku macierz kowariancji przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Gdzie  $s_{11}$  i  $s_{22}$  to wariancje 1 i 2 właściwości.

Odwrotnością powyższej macierzy kowariancji będzie macierz:

$$\begin{bmatrix} 1/s_{11} & 0 \\ 0 & 1/s_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Po podstawieniu powyższych wartości do wzoru (1) na  $T^2$  otrzymamy:

$$T^2(p) = n \left\{ \frac{[\bar{x}_1(p) - \bar{x}_1(p)]^2}{s_{11}} + \frac{[\bar{x}_2(p) - \bar{x}_2(p)]^2}{s_{22}} \right\} \quad (5)$$

Jeśli wariancja obu zmiennych będzie równa 1, to  $T^2$  będzie po prostu kwadratem odległości średniej próbki do średniej procesu pomnożonym przez licznosc próbek. Dzielenie przez wariancje w powyższym wzorze powoduje, że oba człony sumy są bezwymiarowe (nie mają jednostek) i dlatego dozwolone jest dodawanie ich do siebie. Ponieważ wariancja to kwadrat odchylenia standardowego, to można powiedzieć, że odległość od średnich w kierunku obu właściwości liczymy w jednostkach odchylenia standardowego dla danej właściwości.



A co będzie, gdy zmienne są ze sobą liniowo powiązane, a co za tym idzie, współczynniki poza przekątną macierzy kowariancji są różne od zera? Zobaczmy to na przykładzie. Przyjmijmy, że nasza macierz kowariancji jest następująca:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,71 \\ 0,71 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Średnie dla procesu dla obu zmiennych niech wynoszą 0. Jeśli średnie w próbie będą wynosić 1 i 1, to otrzymamy wartość  $T^2 = 1,17$ . Gdybyśmy policzyli „zwyčajną” odległość od średniej procesu, to jej kwadrat wyniesie 2. W tym wypadku wartości średnich były z grubsza zgodne z zależnością wynikającą z macierzy kowariancji. Natomiast gdybyśmy mieli wartości zmiennych 1 i -1, to  $T^2$  wyniesie 6,83 i będzie znacznie większe od kwadratu „zwykłej” odległości – i tak właśnie powinno być!

W przypadku karty  $T^2$  stosuje się dwie granice kontrolne: dla tzw. fazy 1 i 2. W fazie 1 sprawdzamy, czy proces jest uregulowany, i jeśli tak jest, to ustalamy macierz kowariancji  $\mathbf{S}$  i wektor średnich  $\bar{\mathbf{x}}$  na potrzeby dalszego monitorowania, tj. fazy 2. W fazie 1 górną granicę kontrolną wyznaczamy ze wzoru:

$$UCL = \frac{r(m-1)(n-1)}{mn-m-r+1} F_{\alpha,r,mn-m-r+1} \quad (7)$$

Natomiast w fazie 2 ze wzoru:

$$UCL = \frac{r(m+1)(n-1)}{mn-m-r+1} F_{\alpha,r,mn-m-r+1} \quad (8)$$

W powyższych wzorach  $r$  oznacza liczbę właściwości,  $m$  liczbę próbek,  $n$  licznosc próbki,  $F_{\alpha,r,mn-m-r+1}$  to kwantyl rozkładu  $F$  dla prawdopodobieństwa  $1 - \alpha$ , a  $\alpha$  to prawdopodobieństwo błędnego sygnału o rozregulowaniu.

W obu fazach dolna granica kontrolna wynosi 0.

Do oceny stabilności zmienności w przypadku wielowymiarowym najczęściej stosuje się kartę uogólnionej wariancji. Na karcie tej wykreślany jest wyznacznik macierzy kowariancji  $\mathbf{S}$  dla próbki (zdefiniowanej wzorem 2 powyżej). W przypadku dwu właściwości wyznacznik obliczamy ze wzoru:

$$\det \mathbf{S} = \det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \quad (9)$$

Jeśli dla danej próbki (powiedzmy o numerze  $q$ ) wartości odchyłeń pomiarów od średniej zmieniają się proporcjonalnie:

$$[x_{ik}(q) - \bar{x}_i(q)] = a[x_{ik}(q) - \bar{x}_i(q)], \quad (10)$$

to z własności wyznacznika i definicji macierzy  $\mathbf{S}$  wynika, że jej wyznacznik zostanie pomnożony przez  $a^2$ . Ilustruje to, jak zmiany rozrzutu poszczególnych zmiennych wpływają na kartę uogólnionej wariancji.

Z drugiej strony zauważmy, że stosowanie jednej liczby zamiast całej macierzy jest dużym uproszczeniem. W szczególności wyznacznik macierzy  $\mathbf{S}$  jest nieczuły na zmianę kierunku zależności zmiennych: jeśli współczynniki kowariancji  $s_{12}$  i  $s_{21}$  zmienią znak, to wyznacznik pozostanie taki sam.



Granice kontrolne dla macierzy  $\mathbf{S}$  wyznaczonej z próbek obliczane są ze wzorów [1]:

$$UCL = \det \mathbf{S} \left( 1 + 3 \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \quad (11)$$

$$LCL = \det \mathbf{S} \left( 1 - 3 \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \quad (12)$$

$$b_1 = \frac{\prod_i^r (n-i)}{(n-1)^r} \quad (13)$$

$$b_2 = \frac{\prod_i^r (n-i)}{(n-1)^{2r}} \left[ \prod_{j=1}^r (n-j+2) - \prod_{j=1}^r (n-j) \right] \quad (14)$$

## Literatura

1. Montgomery D.C, *Introduction to Statistical Quality Control*, Third Ed., John Wiley & Sons, 1997.
2. Greber T., *Statystyczne sterowanie procesami - doskonalenie jakości z pakietem STATISTICA*, StatSoft Polska, 2000.
3. Sałaciński T., *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2009.
4. Manson R. L., Young J.C, *Detection Decision*, Quality Progress vol. 43(4), 2010.
5. Demski T, *Jak ugotować dobrą zupę, czyli modelowanie procesów wsadowych z wykorzystaniem MSPC na przykładzie procesu polimeryzacji*, [www.statsoft.pl/czytelnia/artykuly/Modelowanie\\_proc\\_wsadowych.pdf](http://www.statsoft.pl/czytelnia/artykuly/Modelowanie_proc_wsadowych.pdf).
6. Aczel A.D, *Statystyka w zarządzaniu*, PWN, 2000.